Α.Μ.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ (ΛΕΚΤΟΡΑΣ)

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1
ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ Α.Μ.
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ
13 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ \sin x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Χρησιμοποιώντας τους σχετικούς ορισμούς, εξετάστε

(i) **(05%)** αν η f είναι **επί**.

(ii) **(05%)** αν η f είναι **αμφιμονοσήμαντη**.

(iii) **(05%)** την f ως προς τη **μονοτονία**.

(iv) **(10%)** την f ως προς τη **συνέχεια**.

(v) **(10%)** την f ως προς τη **παραγωγισιμότητα**.

2. **(10%)** Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **δεν** υπάρχει.

3. **(05%)** Εξετάστε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a < b$ τέτοιοι ώστε οι **υποθέσεις** του Θεωρήματος του Bolzano να ικανοποιούνται για την f στο $[a, b]$.

4. **(05%)** Εξετάστε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a < b$ τέτοιοι ώστε τα **συμπεράσματα** του Θεωρήματος του Bolzano να ικανοποιούνται για την f στο $[a, b]$.

5. **(10%)** Βρείτε μια συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(i) η g να έχει **άπειρα** το πλήθος σημεία **ασυνέχειας**.

(ii) για κάθε $x \in [1, 2)$ το $g(x)$ να είναι **σταθερό** σημείο της f.

6. **(15%)** Εξετάστε την ορθότητα του ακόλουθου ισχυρισμού

*"Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A \neq \emptyset$ και A **φραγμένο**,*
*το $f(A)$ έχει **μέγιστο** στοιχείο."*

7. **(20%)** Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **συγκλίνει** και επιπλέον ότι $a_n \in \mathbb{N}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν **άπειρα** $\nu, \mu \in \mathbb{N}$, με $\nu \neq \mu$, τέτοια ώστε $f(a_\nu - a_\mu) = 1$.